

Л 4. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами. Перпендикулярные вектора. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение.

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}).$$

Скалярное произведение обозначается символами $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \vec{b}$, $(\vec{a} \vec{b})$. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно соотношение $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$.

Теорема. Пусть в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x_1, y_1, z_1) , а вектор $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Пример. Если $\vec{a} = (1, 2, 3)$, а $\vec{b} = (4, 5, 6)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$.

Следствие 1. Если вектор $\vec{a} = (x, y, z)$, в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Следствие 2. Косинус угла φ между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ равен

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Следствие 3. Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ перпендикулярны только в том случае, когда $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$.

Определение. Направляющими косинусами ненулевого вектора $\vec{a}$ называются косинусы углов, образованных этим вектором с осями координат Ox , Oy , Oz .

Обычно эти углы обозначаются через α , β , γ .

Следствие 4. Для вектора $\vec{a}$ с координатами (x, y, z) направляющие косинусы записываются в виде: $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

Определение. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий трем условиям а) Модуль вектора $\vec{c}$

равен произведению модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними:
 $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$; **в)** $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. он перпендикулярен плоскости, проходящей через вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$; **с)** Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая.

1°. В отличие от скалярного произведения, векторное произведение антикоммутативно, т.е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

2°. Нулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны только в том случае, когда $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

3°. Постоянный множитель можно выносить за знак векторного произведения, т.е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и числа λ верно $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

4°. Векторное произведение обладает свойством дистрибутивности, т.е. для любых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}$ верно $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$.

Теорема. Пусть в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) соответственно.

Тогда в этом базисе $\vec{a} \times \vec{b} = ((y_1 z_2 - z_1 y_2), (x_1 z_2 - z_1 x_2), (x_1 y_2 - y_1 x_2))$.

Для запоминания этой формулы используется её запись в виде условного определителя:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

который необходимо разложить по первой строке.

Пример. Пусть $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 5, 6)$,

Найдем $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - \vec{j}(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + \vec{k}(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} = (-3, 6, -3).$$

Следствие 1. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, равна:
 $S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}.$

Площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна:

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}.$$

Следствие 2 Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$, лежащих в плоскости Oxy , равна: $S_{\text{пар}} = |x_1 y_2 - y_1 x_2|$.
Площадь треугольника, построенного на векторах, равна: $S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - y_1 x_2|$.

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с вектором $\vec{c}$.

Оно обозначается символами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ или $\vec{a} \vec{b} \vec{n} : \vec{a} \vec{b} \vec{n} = \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \vec{c}$.

Свойства смешанного произведения

1⁰. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равно $\pm$ объему параллелепипеда, построенного на этих векторах: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \pm V_{\text{пар}}$. Здесь знак «+» берется в случае, если тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая, «-» если она левая.

2⁰. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ – являются компланарными только в том случае, когда их смешанное произведение равно 0: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

3⁰. При перестановке местами любых двух векторов смешанного произведения оно меняет свой знак на противоположный; т.е.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{n} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b} = \vec{c} \vec{a} \vec{b} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c}.$$

4⁰. Постоянный множитель можно выносить из любого сомножителя смешанного произведения, т.е. для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и числа λ $\left(\lambda \vec{a} \right) \vec{b} \vec{c} = \lambda \vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

5⁰. Смешанное произведение дистрибутивно для любого сомножителя, т.е. для любых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}$ верно: $\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \right) \vec{b} \vec{c} = \vec{a}_1 \vec{b} \vec{c} + \vec{a}_2 \vec{b} \vec{c}$.

Теорема. Пусть в базисе $\left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеют координаты соответственно (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) , тогда их смешанное произведение записывается в виде определителя: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Следствие. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, равен $V_{\text{пар}} = \left| \vec{a} \vec{b} \vec{c} \right|$.

Объем тетраэдра (треугольной пирамиды), образованного этими векторами, равен

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} |abc|.$$

